

## EL COEFICIENTE DE POISSON, ¿DE DÓNDE PROVIENE?, ¿CÓMO AFECTA LAS PROPIEDADES DEL HORMIGÓN?<sup>1</sup>

Por Roberto J. Torrent, Materials Advanced Services Ltd.: [torrent.concrete@gmail.com](mailto:torrent.concrete@gmail.com)

### ¿De dónde proviene el coeficiente de Poisson?

Todos conocemos los principios de la elasticidad y, en particular, la importancia del módulo de elasticidad para el estudio de la mecánica de los cuerpos sólidos. Sabemos que cuando un cuerpo es sometido a un esfuerzo de tracción, se produce un alargamiento que resulta en un acortamiento en caso de tratarse de esfuerzos de compresión. Esas deformaciones resultan de la acumulación del aumento o disminución de las distancias interatómicas entre los miles de billones de átomos que conforman el cuerpo macroscópico.

O sea, el cambio relativo de la distancia interatómica  $r$  respecto de la posición de equilibrio  $r_0$  es igual a la deformación específica  $\varepsilon$  que experimenta el cuerpo:

$$\varepsilon = \frac{\Delta r}{r_0} = \frac{\Delta L}{L_0}$$

En el caso de un material elástico, las deformaciones específicas  $\varepsilon$  se relacionan con las tensiones aplicadas  $\sigma$  a través del módulo de elasticidad  $E$ :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

La Figura 1 muestra ilustres científicos que fueron pioneros en el desarrollo de los principios de la elasticidad.



Fig. 1 – Científicos que contribuyeron a establecer los principios de la elasticidad

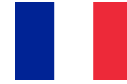
Un poco más oscuro es el origen del otro parámetro que define la elasticidad de un cuerpo, o sea el coeficiente de Poisson  $\mu$ .

<sup>1</sup> Sugerencia: antes de leer el artículo, ver slides 10 a 20 del Video [Torrent, 2021]

Se ha verificado experimentalmente que cuando un cuerpo se estira en la dirección  $x$  (por ejemplo, debido a un esfuerzo de tracción), al mismo tiempo, se contrae en la dirección transversal. Si el cuerpo se contrae en la dirección  $x$ , experimenta una extensión en la dirección transversal.



Siméon D. Poisson  
(1781-1840)



S.D. Poisson encontró que la relación entre la deformación transversal y la longitudinal es constante para cada material y constituye una propiedad elástica fundamental: el coeficiente de Poisson  $\mu$ .

Una explicación sobre el origen de  $\mu$  surge del equilibrio atómico, por lo que seguiremos el desarrollo de [Richards, 1965]. La figura 2 muestra el esquema de un material ideal constituido por un arreglo regular de átomos. En su posición inicial (antes de aplicar la tensión de tracción  $\sigma$ ), la distancia entre los átomos vecinos es la misma ( $r_0$ ). Por lo tanto, los triángulos  $mnp$  y  $mnq$  son equiláteros.

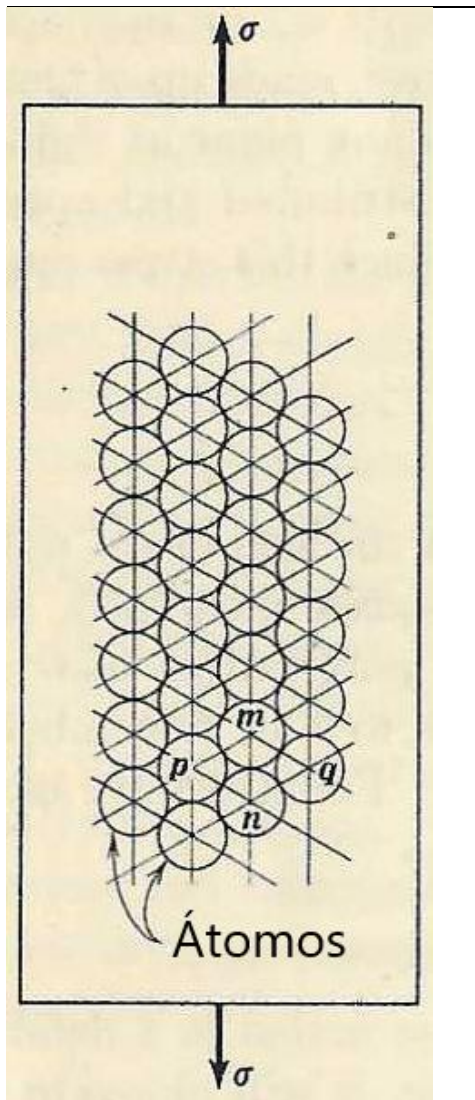


Fig. 2 - Esquema de un cuerpo ideal

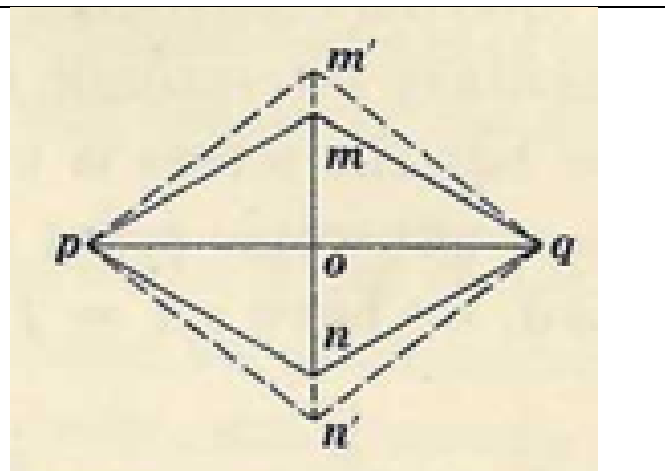


Fig. 3a) - Deformación del triángulo si  $pq$  quedara fijo

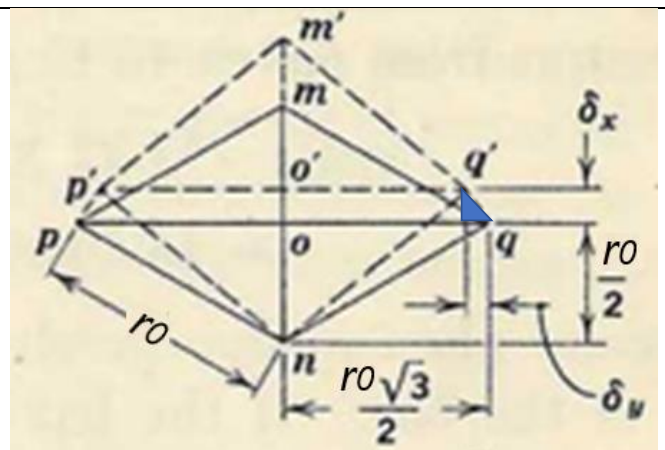


Fig. 3b) - Deformación del triángulo si la distancia interatómica  $r_0$  ( $pn$ ) quedara fija

La Fig. 3a muestra la deformación del triángulo por la extensión de la distancia  $mn$  si la distancia horizontal  $pq$  quedara fija. En ese caso, las distancias interatómicas  $mp$ ,  $mq$ ,  $np$  y  $nq$  aumentarían lo que resultaría en una fuerza resultante de atracción entre los átomos  $p$  y  $q$  que tendería a acercarlos. Para que las distancias interatómicas diagonales  $mp$ ,  $mq$ ,  $np$  y  $nq$  no se modifiquen, es necesario que la distancia  $pq$  se contraiga (efecto Poisson). Tratemos de cuantificar el problema.

Llamemos  $\delta x$  ( $\delta_o$ ) al aumento de la distancia  $on$  (que es igual a  $r_0/2$ , o sea a la mitad de la distancia interatómica original  $mn$ ), debido a la tensión de tracción  $\sigma$  aplicada al cuerpo. La deformación específica en dirección vertical es entonces:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{\delta n} \quad (1)$$

Como  $nq$  queda constante, el punto  $q$  se mueve, para pequeños desplazamientos, perpendicularmente a  $nq$  y designamos como  $\delta_y$  a la componente horizontal de dicho desplazamiento. Vemos entonces que el pequeño triángulo sombreado es proporcional al  $noq$ , por lo que podemos escribir:

$$\varepsilon_y = \frac{\delta_y}{\delta q} = \frac{\delta_x/\sqrt{3}}{\delta n \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\delta_x}{\delta n} = \frac{1}{3} \cdot \varepsilon_x \quad (2)$$

O sea que, desde el concepto de equilibrio interatómico se demuestra que una deformación  $\varepsilon_x$ , conlleva inevitablemente una deformación perpendicular  $\varepsilon_y$ , de signo contrario, según la siguiente relación:

$$\varepsilon_y = -\mu \cdot \varepsilon_x \quad (3)$$

Donde  $\mu$  es una propiedad elástica que, para el material ideal mostrado en la Fig. 2 es igual a  $1/3$ , pero que adopta distintos valores según el material del que se trate. La Tabla 1 muestra valores de  $\mu$  correspondientes a distintos materiales, destacándose los de uso estructural.

Tabla 1 – Coeficiente de Poisson de algunos materiales

Material	Coeficiente de Poisson $\mu$
Goma	0.50
Aleación de Al	0.32
<b>Acero</b>	<b>0.27 – 0.30</b>
<b>Hormigón</b>	<b>0.10 – 0.20</b>
Vidrio	0.18 – 0.3
Corcho	0.00
<b>Madera</b>	<b>&lt; 0.10 ó &gt; 0.50 según la dirección</b>

Un caso curioso es el corcho natural que, debido a su estructura porosa, hace que se comprima sin expandirse lateralmente lo que, sumado a su impermeabilidad a líquidos y gases, lo hace ideal para producir tapones de botellas de vino y espumantes.

Vemos que el coeficiente de Poisson del hormigón varía entre 0.10 y 0.20, algo menor que el del acero. Aunque existe un método ASTM C469 para determinarlo (ver Fig. 4), dada su escasa variación, raramente se lo mide.

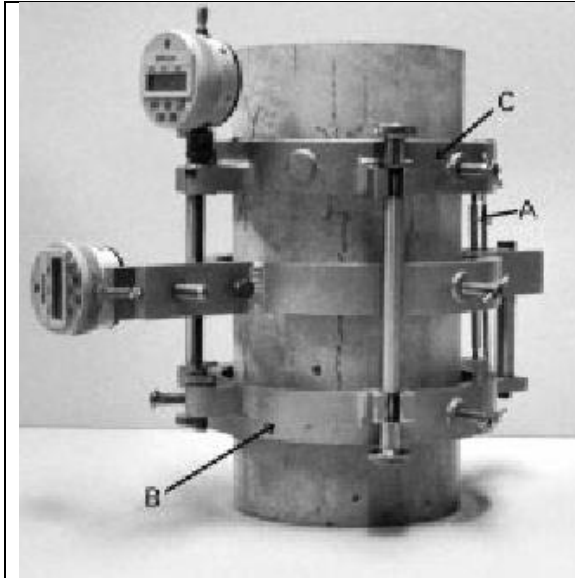


Fig. 4 – Dispositivo para la medición simultánea del módulo de elasticidad y del coeficiente de Poisson de cilindros de hormigón (ASTM C469)

### ¿Cómo afecta $\mu$ el comportamiento del hormigón?

Antes de entrar en el tema, conviene recordar el efecto de los estados triaxiales de compresión sobre la resistencia del hormigón. Un tratamiento riguroso, en base a los invariantes del tensor de tensión puede encontrarse en [Ottosen, 1977; Torrent et al, 1987], pero excede el alcance de esta nota. Vamos a circunscribirnos a un tratamiento aproximado, pero muy descriptivo, siguiendo el esquema propuesto en ese excelente libro conceptual que es [Moretto, 1967], el que se ilustra en la Fig. 5.

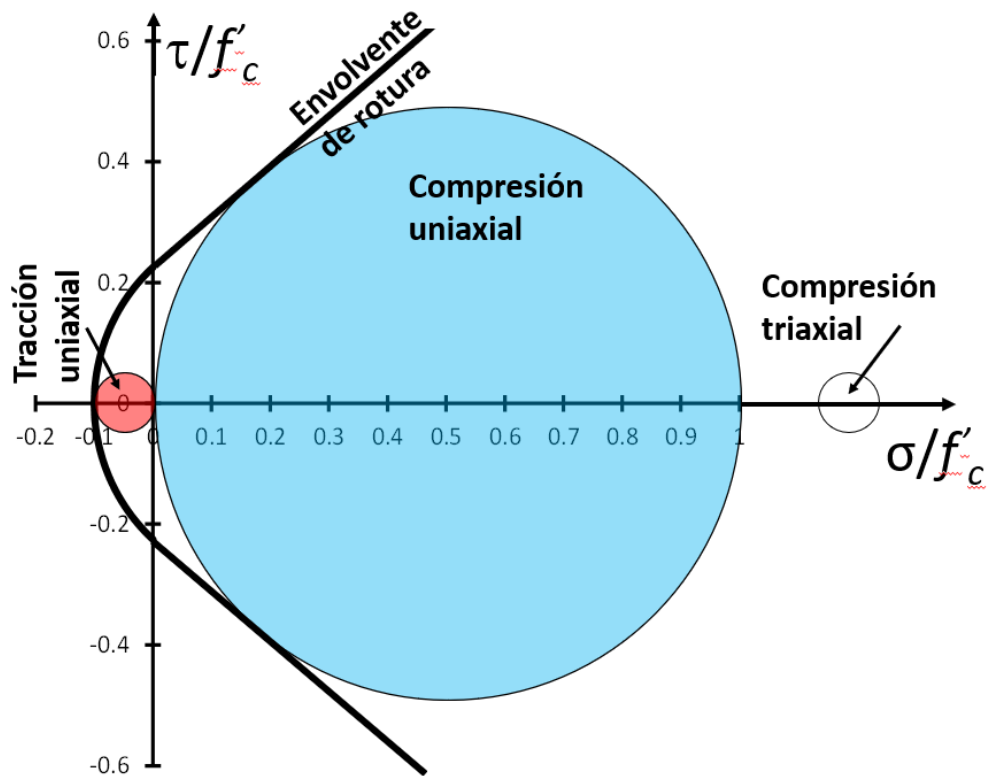


Fig. 5 – Envolvente de los círculos de Mohr de rotura

La Fig. 5 muestra un diagrama  $\sigma - \tau$  donde en abscisas tenemos las tensiones normales  $\sigma$  (compresión positiva, tracción negativa), referidas a la resistencia a compresión uniaxial  $f'_c$  del hormigón, y en ordenadas las tensiones tangenciales  $\tau$ , en la misma escala.

El círculo grande sombreado es el círculo de Mohr correspondiente a la rotura en compresión uniaxial, con las tensiones principales ( $\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1$ ) resultando  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  y  $\sigma_3 = f'_c$ . El círculo sombreado más pequeño es el círculo de Mohr de rotura en tracción uniaxial, suponiendo que la resistencia a tracción es  $-0.1 f'_c$ . La línea gruesa corresponde a la envolvente de los círculos de Mohr de rotura tal que, si el círculo de Mohr correspondiente a un estado tensional dado la excede, habrá falla del material.

El círculo blanco de la derecha corresponde a un hipotético estado tensional triaxial de compresión ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 1.15 f'_c$  y  $\sigma_3 = 1.25 f'_c$ ) que muestra que, a pesar de superarse la resistencia  $f'_c$ , la sollicitación está muy por debajo de la envolvente de rotura, por lo que el material está muy lejos de su falla. El caso extremo es el llamado estado "hidrostático", donde  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 > 0$ , para el que el círculo de Mohr se reduce a un punto y que, teóricamente resistiría una compresión infinita. Veremos a continuación cómo se aplica este fenómeno.

*Efecto de la esbeltez de la probeta sobre la medición de la resistencia a compresión*

Comencemos por aclarar que el ensayo de compresión uniaxial no es tan uniaxial. Si aplicamos una carga de compresión sobre un cilindro libre de hormigón, éste se expandiría lateralmente, por el efecto Poisson, tal como lo ilustra la Fig. 6a.

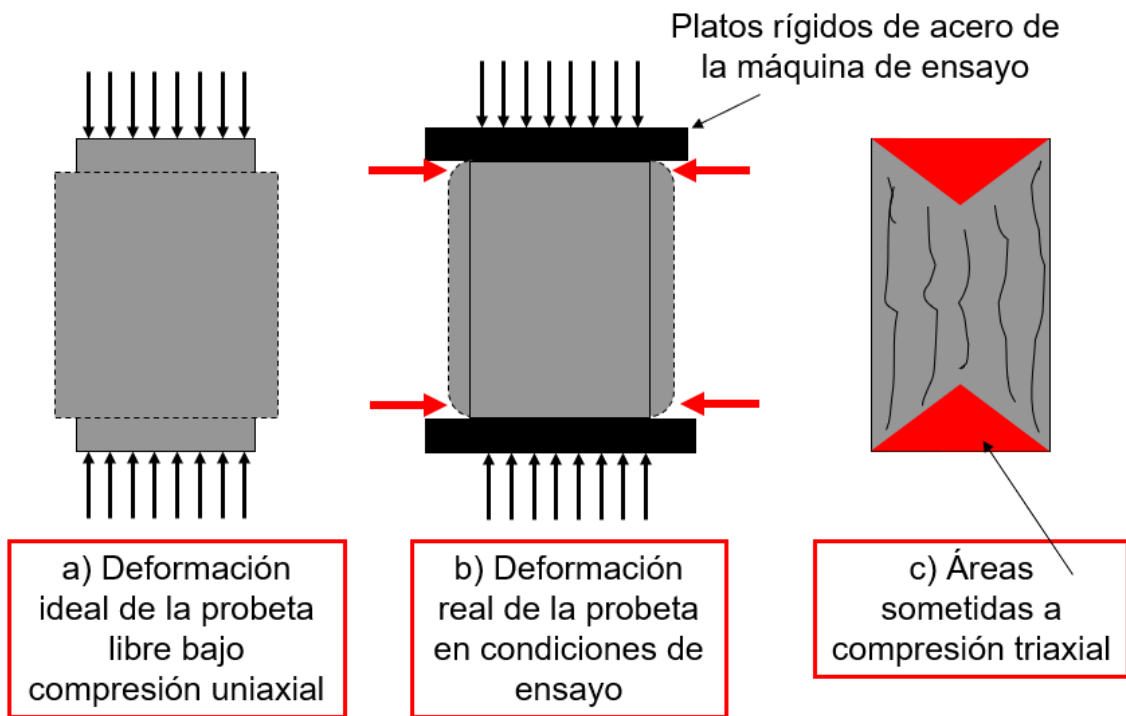


Fig. 6 – Efecto de la restricción de los platos de la prensa sobre la expansión de Poisson

En el ensayo real, Fig. 6b, la probeta (pulida o encabezada/refrentada) está en contacto con los platos de la prensa de ensayo, elementos muy rígidos de acero. Si bien el plato también se deforma y experimenta el efecto de Poisson (con un  $\mu$  mayor que el del hormigón, según Tabla 1), el módulo de elasticidad del acero es un orden de magnitud mayor que el del hormigón, por lo que tanto las deformaciones axiales como las transversales serán mucho menores. En consecuencia, debido a la fricción entre los platos y la probeta se generan tensiones tangenciales (ilustradas por flechas horizontales) que evitan la expansión lateral natural de las caras en contacto con los platos, generándose un estado triaxial de compresión en las zonas de la probeta cercanas a los platos (representadas por los triángulos en la Fig. 6c). La rotura del cilindro se inicia en la zona central de las probetas evidenciada por fisuras verticales, permaneciendo las zonas cercanas a los platos relativamente indemnes, lo que conduce a la forma ortodoxa del cilindro roto en forma de reloj de arena<sup>2</sup>.

Esto explica por qué los cubos o cilindros de esbeltez altura/diámetro  $< 2$  dan resistencias mayores que el cilindro normal con esbeltez 2. La Fig. 7 ilustra la resistencia relativa entre cilindros de distinta esbeltez, referida a la de la probeta normal (IRAM 1551). Para probetas menos esbeltas, la zona indemne ocupa mayor volumen de la probeta, lo que hace que aumente su resistencia a compresión.

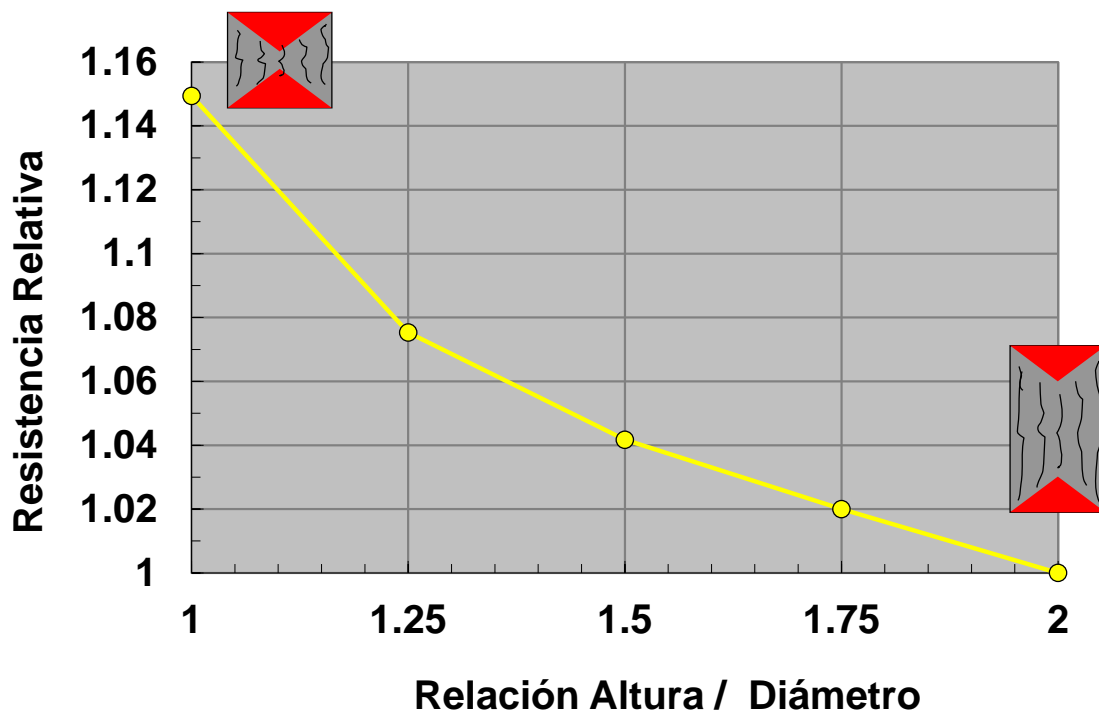


Fig. 7 – Efecto de la esbeltez de la probeta sobre la resistencia a compresión medida

<sup>2</sup> Si se interpone un material deformable, tal como goma no restringida, entre la probeta y los platos, desaparece este efecto y la resistencia medida resulta muy inferior. Cuando se usan elementos restringidos de elastómero, según IRAM 1709, la resistencia no debería caer, pero la forma de rotura se aleja de la ortodoxa.

### Efecto del confinamiento lateral sobre la resistencia axial a compresión

Una aplicación importante del efecto Poisson es en columnas confinadas lateralmente. Igual a como se mostró en la Fig. 6a, una columna solicitada en compresión uniaxial tiende a experimentar una expansión lateral según la Ec. 3. Si contrarrestamos esa expansión mediante la aplicación de solicitaciones laterales de compresión, logramos crear un estado triaxial de compresión mediante el llamado confinamiento “Activo” (ver Fig. 8a). Obsérvese que no sólo la resistencia aumenta sino también la ductilidad del hormigón. Según [Johansson & Åkesson, 2001], la resistencia confinada  $f'_{cc}$  resulta:

$$f'_{cc} = f'_c \cdot (1 + 4.8 \cdot \sigma'_{lat}) \quad (4)$$

donde  $f'_c$  es la resistencia a compresión sin confinar y  $\sigma'_{lat}$  la tensión de compresión de confinamiento aplicada lateralmente.

Otro modo, llamado confinamiento “Pasivo”, de lograr un efecto parecido es hormigonando las columnas dentro de tubos de acero de suficiente espesor como para restringir adecuadamente la expansión lateral, de modo de generar tensiones radiales  $\sigma_r$  de compresión en el hormigón (traccionando a su vez al acero con una tensión  $\sigma_a$ ) y un estado de tensión de compresión triaxial (ver Fig. 8b). Este es un procedimiento bastante habitual, especialmente para hormigones de alta resistencia.

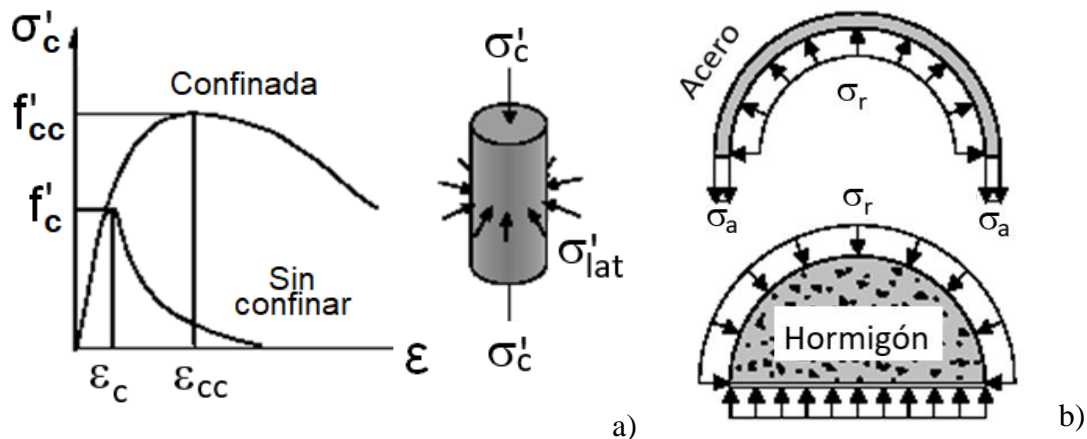


Fig. 8 – Esquema de confinamiento: a) Activo; b) Pasivo

En menor grado, se puede lograr un efecto similar al confinamiento Pasivo, mediante el zunchado de columnas, consistente en estribos poco espaciados en una configuración helicoidal (Fig. 9).

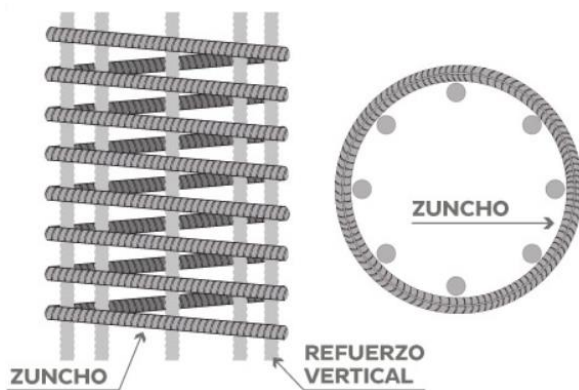


Fig. 9 – Esquema de columna zunchada

### El efecto Poisson y la velocidad de ultrasonido

La velocidad  $V$  de propagación de una onda mecánica longitudinal a través de una varilla de un sólido elástico sigue la ley:

$$V = \sqrt{\frac{E}{\delta}} \quad (5)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material de la varilla y  $\delta$  su densidad. Cito del libro [Sears & Zemanski, 2006]: *CUIDADO Varillas sólidas contra material sólido en volumen. La ecuación (5) es válida sólo para una varilla o barra, cuyos lados pueden arquearse y encogerse libremente un poco al viajar la onda; no es válida para ondas longitudinales en un gran volumen de sólido, ya que aquí el movimiento lateral de cualquier elemento es impedido por el material circundante. La rapidez de las ondas longitudinales en un material sólido en volumen depende de la densidad, el módulo de volumen y el módulo de corte. Una explicación cabal rebasa el alcance de este libro.*

El caso del ultrasonido es precisamente el mencionado en el libro. La onda de ultrasonido viaja muy focalizada desde el transductor emisor al receptor (Fig. 10), siendo confinada por el hormigón circundante, que no permite expansiones y contracciones transversales (estado plano de deformación). En esas condiciones, la velocidad de ultrasonido  $U$  resulta:

$$U = \sqrt{\frac{E}{\delta} \left[ \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\cdot\mu)} \right]} \quad (6)$$

Para  $\mu=0.2$ , el valor entre corchetes en la Ec. 6 resulta 1.11, o sea que la velocidad de ultrasonido en el hormigón es solamente 5% mayor que la calculada para la varilla (Ec. 5), debido al efecto Poisson confinado.



Fig. 10 – Esquema de la propagación de una onda ultrasónica a través del hormigón

Invito a los lectores a que comenten otros casos posibles del uso del coeficiente de Poisson del hormigón en la práctica.

### Referencias

Johansson M. and Åkesson M. (2001). “Finite Element Study of Concrete-Filled Steel Tubes Using a New Confinement-Sensitive Concrete Compression Model”. *Nordic Concr. Res.*, v27, 43-62.

Malhotra, V.M. and Carino, N.J. (2004). “Handbook on Non-Destructive Testing of Concrete”. 2<sup>nd</sup> Ed., CRC Press, ASTM,

Moretto, O. (1967). “Curso de Concreto Armado”. El Ateneo, Buenos Aires, 818 p.



Ottosen, N.S. (1977). "A failure criterion for concrete". ASCE; J. Engng. Mechs. Div., v103, n4, 527-535.

Richards, C.W. (1965). "Engineering Materials Science". Prentice-Hall India, New Delhi, 546 p.

Sears, F. and Zemanski, M. (2006). "Física Universitaria – Vol. 1", 12<sup>a</sup> Ed., Addison-Wesley, México, 763 p.

Torrent, R.J. (2021). "Microestructura y Comportamiento Mecánico de Materiales Estructurales: Acero, Madera y Concreto". Webinar UTEC, Lima, Perú, 23 de Julio: <https://drive.google.com/drive/folders/1sUU68HuKbuNoh8DvkOXxovvIWK30B8qd?usp=sharing>

Torrent, R.J., Dvorkin, E.N. and Alvaredo, A.M. (1987). "A model for work-hardening plasticity and failure of concrete under multiaxial stresses". Cem. & Concr. Res.,v.17, 939-950